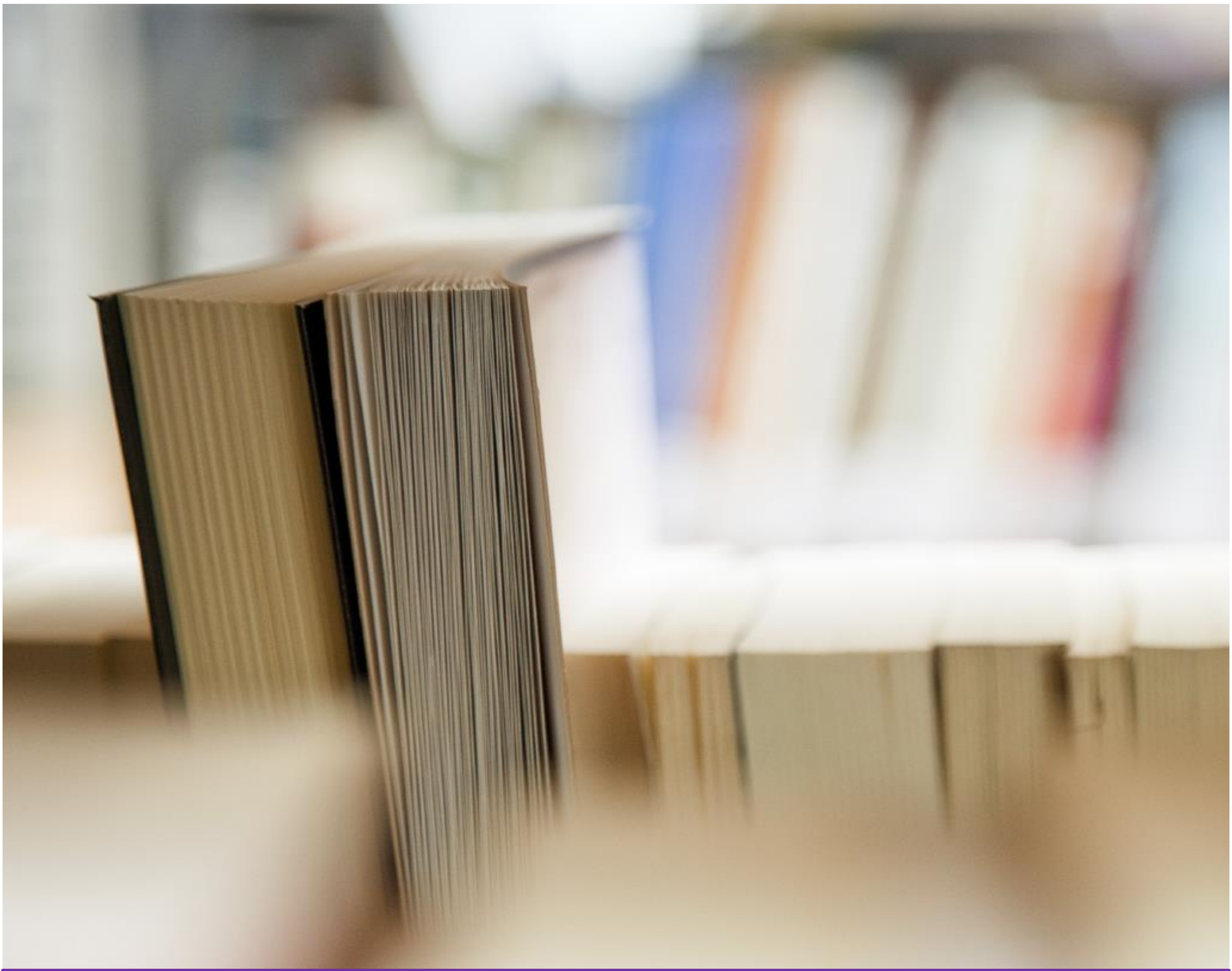


ریاضیات گسسته

فصل دوم:

گراف و مدل‌سازی

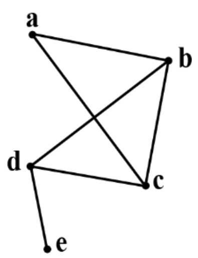
درس اول: معرفی گراف

گراف از واژه Graph به معنی نمودار گرفته شده است. گراف، یک روش مدل‌سازی برای نشان دادن رابطه بین اعضای یک مجموعه است.

➢ **تعریف:** یک **گراف** از مجموعه‌ای از نقاط (که به هر کدام **رأس** می‌گوییم) و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها (که به هر کدام **یال** می‌گوییم) تشکیل شده است.

هر یال بین دو رأس قرار دارد. در گراف G، مجموعه رأس‌ها را با V(G) (Vertex) که مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و مجموعه یال‌ها را با E(G) (Edge) که زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است، نشان می‌دهیم و می‌نویسیم G(V,E).

☑ **مثال: مجموعه رئوس و یال‌های گراف مقابل را بنویسید.**



☑ **مثال: پنج نفر به نام‌های a، b، c، d و e هنگام ملاقات با یکدیگر، به صورت زیر با هم دست داده‌اند:**

a با c و d دست داده است.

b با c و e دست داده است.

c با e دست داده است.

d با e دست داده است.

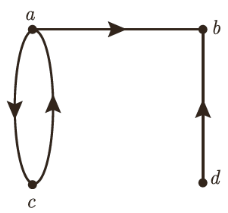
گرافی رسم کنید که نشان دهنده این وضعیت باشد.

➢ **چند تعریف:**

۱← گراف جهت‌دار: به گرافی که یال‌های آن جهت داشته باشند، گراف جهت‌دار گفته می‌شود. برای نمایش مجموعه یال‌های گراف جهت‌دار، از زوج مرتب‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases} V = \\ E = \end{cases}$$



۲← طوقه (لوپ): یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند

۳← دو یال موازی: دو یال را موازی گوئیم، هرگاه بین دو رأس یکسان رسم شده باشند

نکته: گرافی که طوقه و یال موازی نداشته باشد، **گراف ساده** نامیده می‌شود. در این فصل فقط با گراف‌های ساده آشنا خواهیم شد.

۴← مرتبه گراف (p): تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبه گراف G می‌گوییم و با p نمایش می‌دهیم.

۵← اندازه گراف (q): تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را اندازه گراف G می‌گوییم و با q نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر G گرافی ساده از مرتبه p و اندازه q باشد، آنگاه همواره: $۰ \le q \le \binom{p}{۲}$

نکته: تعداد گراف‌های ساده‌ای که با p رأس مشخص (نامگذاری شده) می‌توان ساخت برابر است با: $۲^{\binom{p}{۲}}$

مثال: گرافی ساده با ۵ رأس و ۶ یال رسم کنید.

مثال: یک گراف ساده از مرتبه ۱۰، حداکثر چند یال دارد؟

تست: اگر اندازه یک گراف ساده برابر ۱۳ باشد، آنگاه حداقل مرتبه این گراف کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

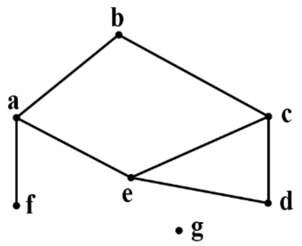
۳) ۶

۴) ۷

۶← درجه یک رأس: به تعداد یال‌های گذرنده از یک رأس (مانند v)، درجه آن رأس می‌گوییم و با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر زوج باشد، آن را رأس زوج می‌نامیم.

۷← بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم.

به طور مثال در شکل فوق داریم:



$\Delta(G) =$

$\delta(G) =$

نکته: در هر گراف ساده همواره داریم: $\Delta \le p-۱$ و $\delta \ge ۰$

به عنوان مثال، در یک گراف ۹ رأسی، حداکثر درجه یک رأس می‌تواند ۸ باشد.

نکته: در گراف از مرتبه p، رأسی که با همه رئوس دیگر مجاور است را **رأس فول** (پُر) می‌نامیم. رأس فول دارای درجه $p-1$ است.

اگر گرافی از مرتبه p دارای k رأس فول باشد، آنگاه $\delta \geq k$.

به عنوان مثال، گرافی با درجه رئوس ۲و۲و۳و۴و۵ وجود ندارد. (چرا؟)

به عنوان مثال، گرافی با درجه رئوس ۲و۳و۴و۵و۶و۶و۶ وجود ندارد. (چرا؟)

نکته: **(ارتباط درجه رئوس با تعداد یال‌ها):** اگر G گرافی ساده از مرتبه p و اندازه q باشد، در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_p)=2q$$

نتیجه مهم: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات:

به عنوان مثال، یک گراف نمی‌تواند یک رأس درجه ۱، یا ۳ رأس درجه ۵ داشته باشد. یا مثلاً گرافی با درجه‌های رئوس ۱و۲و۳و۳و۴ وجود ندارد.

☑ **مثال: گرافی با ۱۰ یال، دو رأس از درجه ۴ دارد و سایر رأس‌های آن از درجه ۳ هستند. مرتبه این گراف چقدر است؟**

☑ **مثال: فرض کنید G گرافی است از مرتبه ۷ و اندازه ۹، به‌طوری‌که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ است. تعیین کنید این گراف چند رأس درجه ۲ و چند رأس درجه ۳ دارد؟**

☑ **تست: گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو رأس از درجه $\Delta=5$، یک رأس از درجه ۲ و یک رأس از درجه $\delta=1$ دارد. این گراف چند رأس درجه ۳ دارد؟**

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) ۰

نکته: الف) در هر گراف ساده G از مرتبه p و اندازه q، رابطه مقابل برقرار است: $\delta \le \deg(v_i) \le \Delta$

ب) اگر از طرفین نامساوی فوق Σ بگیریم، خواهیم داشت:

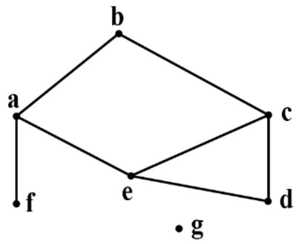
$$\sum_{i=1}^{p}\delta \le \sum_{i=1}^{p}\deg(v_i) \le \sum_{i=1}^{p}\Delta \Rightarrow p\delta \le 2q \le p\Delta \Rightarrow \boxed{\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta}$$

به عبارت $\frac{2q}{p}$ میانگین درجات رئوس گراف G می‌گوییم: $0 \le \delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta \le p-1$

☑ **مثال: در گراف ساده G از مرتبه ۸، $\Delta = 5$ است. حداکثر تعداد یال‌های گراف چقدر است؟**

۸← دنباله درجات رئوس یک گراف ساده: اگر درجات رئوس یک گراف را به صورت یک دنباله نزولی بنویسیم، آن را دنباله درجات رئوس گراف می‌نامیم.

☑ **مثال: دنباله درجات رئوس گراف مقابل را بنویسید.**



☑ **مثال: مرتبه و اندازه گراف G با دنباله درجات رئوس ۱و۱و۱و۳ چقدر است؟ δ , Δ را بیابید.**

نکته: از روی دنباله درجات رئوس گراف می‌توان p و q و δ و Δ را به دست آورد.

☑ **تست: کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد؟**

۱) ۳,۲,۱,۰

۲) ۴,۴,۴,۴,۴

۳) ۳,۲,۱,۱

۴) ۳,۳,۳,۳,۳